Об ошибках измерений

Погрешность измерения — разность между измеренным значением исследуемой величины и ее истинным значением.

Погрешность прямых измерений. Если целью опыта является определение значения какой-либо физической величины X по n ее отдельным измеренным значениям x_1, x_2, …, x_n, то результат измерений можно охарактеризовать с помощью следующих статистических параметров:

1) наиболее правдоподобное значение X, в качестве которого используют *выборочное среднее значение*;

2) дисперсию распределения отдельных значений измеряемой величины около ее выборочного среднего, т. е. *выборочную дисперсию*;

3) стандартное отклонение и погрешность выборочного среднего.

В любой **конечной** серии измерений нельзя определить точно ни истинное **среднее значение** μ, ни **истинную дисперсию** σ^2 случайной величины.

В реальном эксперименте всегда имеют дело с конечной выборкой из генеральной совокупности — конечным числом значений случайной величины. Поэтому возможно получить только ***оценки*** неизвестных параметров и их погрешности, которые в свою очередь тоже являются случайными величинами.

Выборочное среднее значение <x>. На практике в подавляющем большинстве случаев для **оценки** истинного среднего значения μ случайной величины используют среднее арифметическое по конечной выборке данных

$$\boxed{\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \mu ,}$$

где n — число независимых измерений.

С увеличением числа замеров $\langle x \rangle$ приближается к истинному среднему.

Дисперсия величины X определяется формулой

$$D(X)=var(X)=\sigma^2=\langle (X-\mu)^2 \rangle =\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i-\mu)^2, n\to\infty$$

В последней формуле под знаком $n \to \infty$ следует понимать, что суммирование производится по всей генеральной совокупности значений случайной величины.

Так как точное значение величины μ неизвестно, также как неизвестна и вся генеральная совокупность, невозможно вычислить истинную дисперсию $D(X)$. Любые экспериментальные данные представляют собой лишь конечную выборку из генеральной совокупности данных и поэтому на основании этих данных оказывается возможным лишь дать оценку истинной дисперсии, т.е. вычислить так называемую выборочную дисперсию.

При большом количестве измерений значение $<x>$ приближается к μ, поэтому за оценку истинной дисперсии можно взять, например, следующее выражение

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2.$$

Так как для этой оценки использовалось выборочное среднее $<x>$, эта оценка не является лучшей. В теории погрешностей доказывается, что в случае конечной выборки наилучшей оценкой истинной дисперсии $D(X)=\sigma^2$ является следующая

$$\boxed{D = \sigma^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2.}$$

Следует запомнить, что последняя формула может использоваться для оценки дисперсии только в случае достаточно большого объёма выборки, т.е. $n >> 1$. На практике достаточно, чтобы $n > 30$.

В случае только одного измерения величины X выборочное среднее значение $< x > = x$. При этом дисперсия оказывается неопределенной. Если есть основание предполагать, что распределение величины X есть распределение Пуассона, а в ядерной физике это бывает часто (например, момент распада ядра, моменты попадания частиц или гамма-квантов в детектор, образование заряженной частицей неравновесных зарядов в объёме детектора, регистрация детектором частиц и квантов и др. подчиняются распределению Пуассона), то для оценки значения σ^2 используется формула

$$\boxed{D = \sigma^2 = < x > = x}.$$

Следует понимать, что значение величины дисперсии никак не зависит от количества произведенных измерений. Так, если проведено большое количество измерений, то дисперсии, вычисленные по последним двум формула совпадут

$$\boxed{D = \sigma^2 = < x > \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - < x >)^2}.$$

Стандартное отклонение σ величины X определяется как корень квадратный из дисперсии $D(X)$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{D}}.$$

В случае конечной выборки стандартное отклонение выражается формулой

$$\boxed{\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2}.}$$

В случае только одного измерения и если случайная величина подчиняется распределению Пуассона, стандартное отклонение выражается формулой

$$\boxed{\sigma = \sqrt{<x>}.}$$

Стандартное отклонение σ определяет интервал, в который с вполне известной вероятностью попадают значения случайной величины. Эту вероятность называют **доверительной вероятностью**, а границы этого интервала – **доверительными границами**. Доверительная вероятность P связана с доверительными границами ε через интеграл вероятности

$$P(-\varepsilon \le x \le \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\sigma}} d\varepsilon.$$

Вероятность попасть при одном измерении в интервал $\Delta x = \varepsilon\sigma$ составляет:

$\varepsilon = 1$, x от $\langle x\rangle - \sigma$ до $\langle x\rangle + \sigma$ ⇨ 0,683 (68,3%)
$\varepsilon = 2$, x от $\langle x\rangle - 2\sigma$ до $\langle x\rangle + 2\sigma$ ⇨ 0,950 (95,0%)
$\varepsilon = 3$, x от $\langle x\rangle - 3\sigma$ до $\langle x\rangle + 3\sigma$ ⇨ 0,997 (99,7%)

Погрешность, которая выходит за пределы интервала $\langle x\rangle \pm 3\sigma$ считается промахом (так называемое правило «трёх сигм»).

Дисперсия выборочного среднего (погрешность выборочного среднего значения). Дисперсия значения $<x>$ оказывается меньше дисперсии величины X и определяется формулой

$$D(<x>)=\frac{1}{n}D(X).$$

Видно, что выборочное среднее значение является при больших n значительно более точной оценкой μ, чем отдельное измерение x_i, так как $<x>$ имеет меньший разброс (стандартное отклонение) относительно истинного среднего

$$\boxed{\sigma(<x>)=\sigma_{<x>}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.}$$

Это важное соотношение справедливо для любых распределений.

Во все ранее приведенные формулы входит выражение для дисперсии, которая может быть определена лишь при числе измерений $n > 30$. Исключение составляет лишь случай, когда заранее известно, что величина распределена по закону Пуассона (D = $\langle x \rangle$). Как правило, конечная выборка данных содержит значительно меньше измерений ($n \sim 3$–5). В этом случае, доверительная граница Δx определяется с учётом коэффициента Стьюдента $t_{p,n}$:

$$\boxed{\Delta x = \sigma_{<x>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \Delta_{n,p} x = t_{p,n} \cdot \sigma_{<x>} = \frac{t_{p,n} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} .}$$

Окончательный результат измеряемой величины x можно тогда представить в следующем виде

$$\boxed{x = \langle x \rangle \pm \Delta_{n,p} x \quad .}$$

Таблица наиболее употребительных значений коэффициента Стьюдента

	p		
n	0,70	0,90	0,95
2	2,1	6,3	12,7
3	1,3	2,9	4,3
4	1,3	2,4	3,2
5	1,2	2,1	2,8
6	1,2	2,0	2,6
7	1,1	1,9	2,4
8	1,1	1,9	2,4
9	1,1	1,9	2,3
10	1,1	1,9	2,3

Взвешенное среднее. Если x_i независимы и получены из генеральных совокупностей с одним и тем же средним μ, но разными дисперсиями σ_i (а это бывает часто), то наиболее эффективной оценкой μ является взвешенное среднее

$$\boxed{<x> = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \quad \text{где} \quad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.}$$

Погрешность взвешенного среднего определяется выражением

$$\boxed{\frac{1}{\sigma_{<x>}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}.}$$

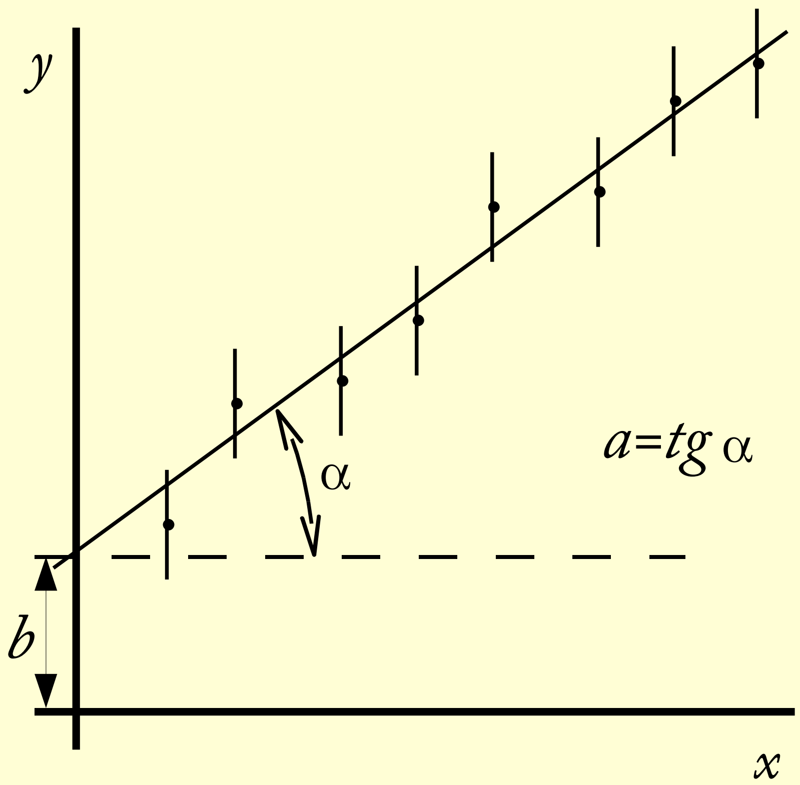
Погрешность непрямых измерений. Рассмотренные выше выражения относятся к непосредственно измеряемым случайным величинам. В сколько-нибудь сложном опыте исследуемая случайная величина представляет собой сложную комбинацию из многих непосредственно измеряемых случайных величин. Такие измерения называют *непрямыми*. Средняя квадратическая ошибка величины, являющейся функцией *m* независимых случайных величин $Z(X_1, X_2, \ldots, X_m) = Z(X)$, может быть рассчитана по формуле

$$\boxed{\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial Z(X)}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_i^2 .}$$

Метод наименьших квадратов. Пусть известно, что измеряемая величина y является линейной функцией другой измеряемой величины x

$$y = a \cdot x + b.$$

Тогда возникает вопрос об определении значений коэффициентов a и b так, чтобы прямая оптимальным образом проходила между точками.



Считается, что прямая будет проведена наилучшим образом, если будет минимальной сумма квадратов расстояний от прямой до экспериментальных точек, а именно:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + b - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = min.$$

Решение задачи на нахождение минимума этой функции приводит к следующим выражениям для коэффициентов

$$\boxed{a=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2}-\overline{x}^2}; \qquad b=\overline{y}-a\overline{x};}$$

и их ошибок

$$\boxed{\sigma_a^2=\frac{\sigma^2}{n\left(\overline{x^2}-\overline{x}^2\right)}; \qquad \sigma_b^2=\frac{\sigma^2\,\overline{x^2}}{n\left(\overline{x^2}-\overline{x}^2\right)}; \qquad cov(a,b)=-\frac{\sigma^2\,\overline{x}}{n\left(\overline{x^2}-\overline{x}^2\right)}.}$$

Здесь σ^2 – дисперсия величины y, $cov(a,b)$ – коэффициент ковариации.

Последнее выражение очень важно при экстраполяции. Например, пусть требуется найти значение Y в некоторой точке X и соответствующую погрешность результата.

Используя формулы, получим

$$\boxed{\sigma_Y^2 = \sigma_b^2 + X^2 \cdot \sigma_a^2 + 2 \cdot X \cdot cov(a, b),}$$

или по другому

$$\boxed{\sigma_Y^2 = \frac{\sigma^2 (X - \bar{x})^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} + \frac{\sigma^2}{n}.}$$

Доверительные интервалы для соответствующих величин можно получить с помощью коэффициентов Стьюдента:

$$\boxed{\Delta a = t_{p,n} \cdot \sigma_a; \qquad \Delta b = t_{p,n} \cdot \sigma_b; \qquad \Delta Y = t_{p,n} \cdot \sigma_Y.}$$

Полученные выражения выведены в предположении, что дисперсии величин y_i одинаковые (или приблизительно одинаковые). Если же дисперсии существенно различны, тогда следует минимизировать следующее выражение

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a \cdot x_i + b - y_i)^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} = min.$$

Решение этой задачи приводит к таким же выражениям для коэффициентов, что и выше за тем исключением, что теперь вместо простых средних арифметических следует использовать взвешенные средние. Например,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i / \sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2}.$$

$$\sigma^2 \quad \rightarrow \quad \overline{\sigma^2} = \frac{\sum \sigma_i^2 / \sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2} = \frac{n}{\sum 1/\sigma_i^2}.$$